

DISTRIBUTION DE LA TEMPERATURE AU SEIN D'UN CYLINDRE TREMPE DANS UN LIQUIDE VAPORISABLE

P. ARCHAMBAULT et J. C. CHEVRIER

Laboratoire de Métallurgie, ENSMIM, Parc de Saurupt, 54042 Nancy, Cedex, France

(reçu le 13 Mars 1976)

Résumé—Nous présentons une méthode numérique qui permet de résoudre l'équation de la chaleur appliquée aux phénomènes instationnaires qui apparaissent pendant la trempe. Cette méthode fournit la distribution bidimensionnelle de la température dans un cylindre au cours du refroidissement. Elle utilise une technique de différences finies basée sur un schéma implicite.

On utilise les conditions limites représentant le transfert de chaleur entre un solide et un liquide vaporisable. On compare l'évolution expérimentale de la température et les résultats obtenus par cette méthode dans le cas d'une trempe dans l'eau bouillante.

Cette méthode permet également d'étudier, d'une façon indirecte, les caractéristiques de vaporisation d'un liquide pendant la trempe.

NOTATIONS

c ,	chaleur massique;
H ,	demi hauteur du cylindre;
i, j ,	coordonnées d'un point courant;
M ,	nombre de points sur l'axe;
N ,	nombre de points sur le rayon;
r ,	rayon d'un point intérieur du cylindre;
R ,	rayon du cylindre;
t ,	temps;
T ,	répartition globale de la température;
U ,	répartition de la température sur le rayon;
V ,	répartition de la température sur l'axe;
z ,	cote d'un point intérieur du cylindre;
α ,	$\frac{\lambda}{c\rho}$, diffusivité thermique;
Δr ,	pas d'espace sur le rayon;
Δz ,	pas d'espace sur l'axe;
ϕ ,	densité de flux de chaleur;
λ ,	conductivité thermique;
ρ ,	masse volumique;
θ ,	température utilisée dans l'équation de la chaleur;
θ_0 ,	température initiale.

POSITION DU PROBLEME

LA CONDUCTION de la chaleur au sein du métal pendant la trempe provoque l'existence de gradients de température qui évoluent rapidement au cours du temps. Il est important de connaître l'évolution de la distribution de température à l'intérieur de la pièce trempée pour prévoir les contraintes qui s'y développent. Celles-ci ont en effet une influence considérable sur le comportement du matériau (usinabilité, déformations à l'usinage, tenue en fatigue).

En pratique, la mesure précise de quelques évolutions de température au sein de la pièce est délicate et ne permet que des résultats ponctuels. De plus, il est impossible de mesurer avec précision l'évolution de la température d'un point de la surface sans modifier les

phénomènes diphasiques d'échange thermique entre le solide et le liquide de trempe.

Soit un cylindre de dimensions finies maintenu à une température constante (par exemple 800°C) et immergé au temps $t = 0$ dans un liquide vaporisable comme l'eau bouillante.

On sait [1-3], comme le schématise la Fig. 1 que, en un point de l'éprouvette le refroidissement s'effectue successivement selon trois modes d'échange de chaleur:

- la caléfaction qui survient à haute température: un film de vapeur isole l'éprouvette du liquide, le refroidissement est lent.
- l'ébullition nucléée, caractérisée par un contact direct liquide de trempe—surface du métal, qui apparaît à une température déterminée de la surface d'échange: de grosses bulles de vapeur se forment à la surface du métal et le refroidissement est très rapide.
- la convection, qui s'instaure progressivement: l'échange de chaleur s'effectue par mouvement de fluide et se ralentit considérablement.

Ces phénomènes sont caractérisés par une courbe de vaporisation, dite "courbe de Nukiyama" [4] (Fig. 2), qui définit le domaine d'existence des différents régimes. Notons que cette courbe, caractéristique du liquide, est obtenue par des expériences délicates de régime permanent et peut servir de condition limite pour l'étude mathématique des refroidissements par trempe.

Le problème se complique encore si, comme le montre le cliché de la Fig. 1, on note l'existence de gradients de température axiaux qui sont révélés par la coexistence des différents modes de vaporisation à la surface de l'éprouvette [5].

En pratique, on sait mesurer correctement les variations en fonction du temps de la température du centre géométrique de l'éprouvette. Connaissant l'allure approximative des conditions aux limites indiquées par la courbe de vaporisation, on cherche à déterminer la répartition dans l'espace $\theta(r, z)$ de la

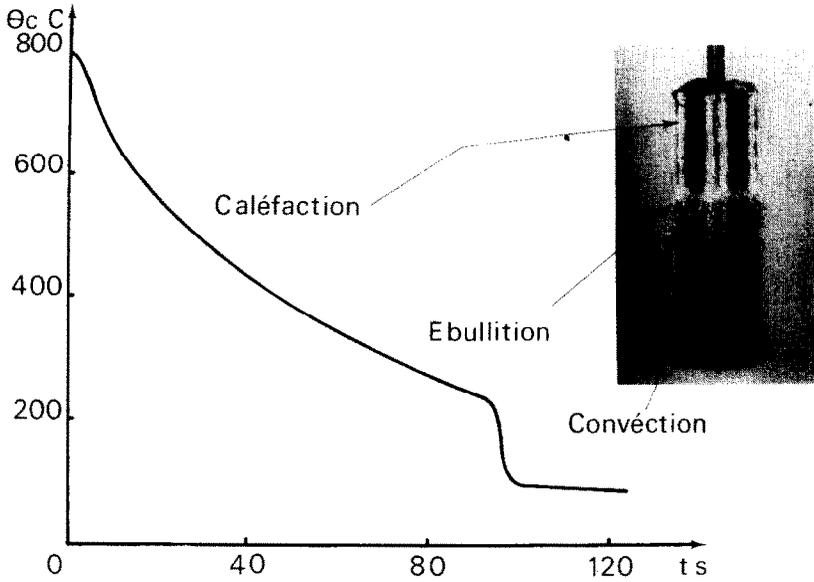


FIG. 1. (a) Courbe de refroidissement (température au centre fonction du temps, d'une éprouvette en nickel $\phi = 16$ mm, $2H = 48$ mm) trempée depuis 800°C dans l'eau bouillante. (b) Photographie de l'éprouvette pendant la transition caléfaction-ébullition nucléée.

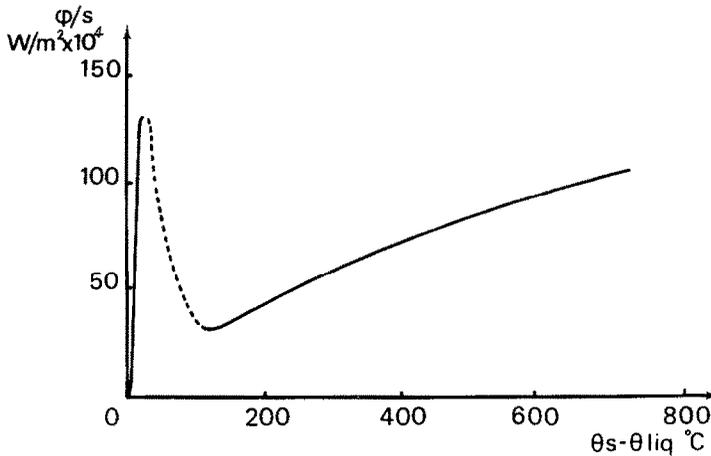


FIG. 2. Courbe de Nukiyama [4] dans le cas de l'eau bouillante, qui porte, en régime permanent, la densité de flux de chaleur extraite, en fonction de la différence entre la température superficielle du solide et la température du fluide (100°C).

température à chaque instant du refroidissement. Par approches successives, on essaie aussi de déterminer avec plus de précision les conditions aux limites, en vérifiant que la répartition de température calculée est en bonne corrélation avec l'évolution mesurée de la température au centre de l'éprouvette.

METHODES DE SOLUTION

Le problème exposé peut se formaliser ainsi: un cylindre fini ($0 \leq r \leq R$ et $-H \leq z \leq H$), de diffusivité thermique constante α , est initialement (au temps $t \leq 0$) à une température uniforme θ_0 . Il est brutalement plongé dans un fluide maintenu à une température θ_{∞} . Ceci impose une densité de flux de chaleur qui est une

fonction discontinue de la température de la surface $\theta(R, z, t)$ et $\theta(r, H, t)$ du solide. On cherche comment la température $\theta(r, z, t)$ évolue dans le temps.

L'équation parabolique de la diffusion de la chaleur s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

avec

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c},$$

λ est la conductivité thermique, ρ la masse volumique, c la chaleur spécifique.

Les conditions aux limites (compte tenu de la symétrie cylindrique) sont les suivantes:

$$t = 0: \theta = \theta_0 \text{ pour } 0 \leq r \leq R \text{ et } 0 \leq z \leq H$$

$$t > 0: \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} = f(\theta_{R,z}), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=H} = f(\theta_{r,H})$$

où la fonction f est définie par la Fig. 2.

Pour des questions de stabilité et de facilité de programmation, nous avons décidé de choisir un schéma implicite aux différences finies [6] associé à un principe de superposition qui consiste à traiter le problème bidimensionnel comme la somme de deux problèmes monodimensionnels (méthode de Von Newman) [7].

La symétrie cylindrique permet de ne prendre en considération qu'un quart du cylindre (gradients de température nuls sur l'axe et sur le plan médian).

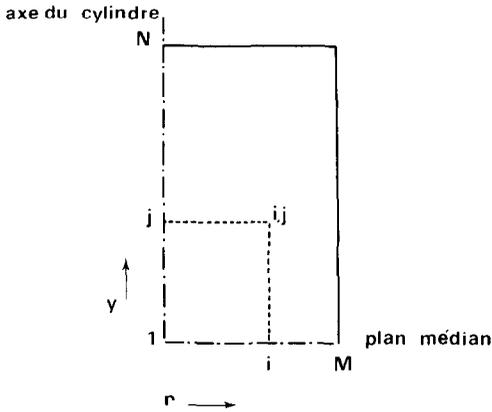


FIG. 3. Notations utilisées dans le maillage nécessaire au calcul.

A l'aide des notations de la Fig. 3, le "maillage" à l'intérieur du cylindre est défini de la façon suivante: l'axe est divisé en $(N-1)$ tranches d'épaisseur $\Delta z = H/N-1$ et le rayon en $(M-1)$ tranches d'épaisseur $\Delta r = R/M-1$. Le réseau ainsi obtenu comporte $(M \cdot N)$ point (i, j) , i variant de 1 à M et j de 1 à N .

Si $T_{i,j}$ est la température du point (i, j) à un instant donné, les Laplaciens en z et en r sont donnés par les relations:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{\Delta r^2}$$

$$+ \frac{1}{(i-1)\Delta r} \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta r} \right).$$

Soit: $T_{i,j}^*$ la répartition bidimensionnelle de la température au temps t , $U_{i,j}$ la répartition monodimensionnelle radiale au temps $t + \Delta t$, $V_{i,j}$ la répartition monodimensionnelle axiale au temps $t + \Delta t$.

L'utilisation des formules précédentes nous permet

d'écrire par un calcul simple:

$$L1 \left(1 - \frac{1}{2(i-1)} \right) U_{i-1,j} + (2 \cdot L1 + 1) U_{i,j} - L1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2(i-1)} \right) U_{i+1,j} = T_{i,j}^* \quad (1)$$

avec $2 \leq i \leq M-1$

$$1 \leq j \leq N$$

$$\text{et } L1 = \alpha \cdot \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$$

$$\text{et } -L2 \cdot V_{i,j-1} + (2 \cdot L2 + 1) \cdot V_{i,j} - L2 \cdot V_{i,j+1} = T_{i,j}^* \quad (1')$$

avec $2 \leq j \leq N-1$

$$1 \leq i \leq M$$

$$\text{et } L2 = \alpha \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z^2}.$$

CONDITIONS LIMITES

Elles sont introduites dans le calcul par les relations suivantes:

1. Sur le rayon

(a) $i = 1$. Le gradient nul sur l'axe impose $U_{0,j} = U_{2,j}$ d'où

$$(2 \cdot L1 + 1) U_{1,j} - 2 \cdot L1 \cdot U_{2,j} = T_{1,j}^* \quad (2)$$

avec

$$1 \leq j \leq N$$

(b) $i = M$. En surface on écrit la loi de Fourier

$$-\frac{\lambda}{\Delta r} (U_{M+1,j} - U_{M,j}) = \phi$$

λ est la conductivité thermique, ϕ est le flux de chaleur défini par la courbe de vaporisation pour la température $T_{M,j}^*$. Cette approximation est justifiée dans la mesure où $T_{M,j}^*$ est voisine de $U_{M,j}$ tant que l'incrément de temps Δt est suffisamment petit.

On obtient alors:

$$\begin{aligned} -L1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2(M-1)} \right) U_{M-1,j} \\ + \left[L1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2(M-1)} \right) + 1 \right] \cdot U_{M,j} \\ = T_{M,j}^* - L1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2(M-1)} \right) \frac{\Delta r}{\lambda} \cdot \phi \end{aligned} \quad (3)$$

avec $1 \leq j \leq N$.

2. Sur l'axe

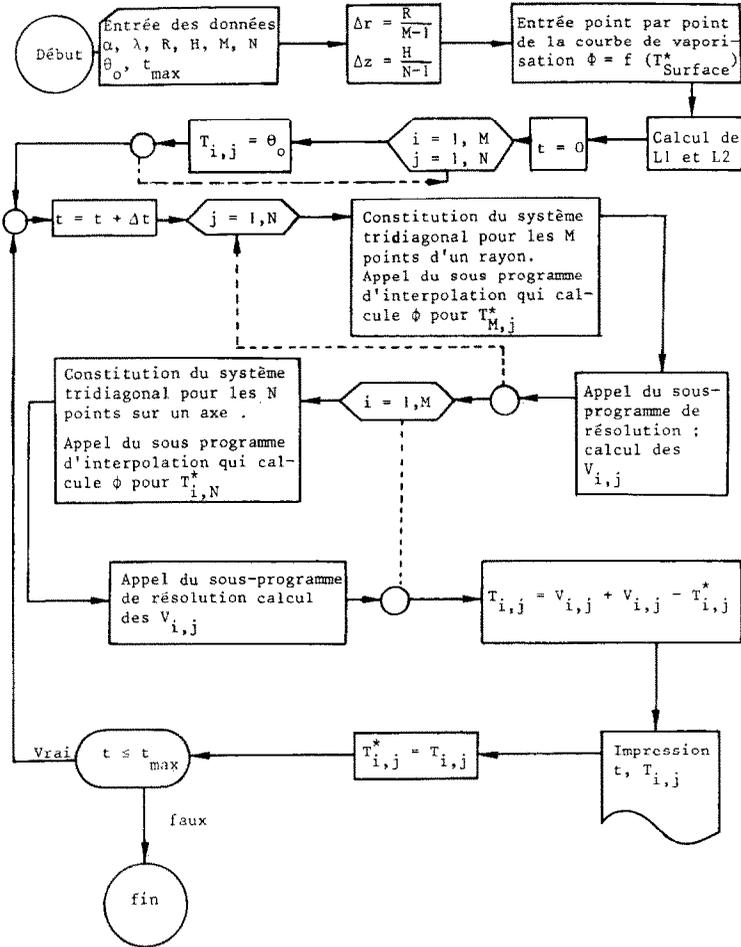
La démarche est identique à celle utilisée pour le rayon. On obtient donc:

(a) $j = 1$.

$$(2 \cdot L2 + 1) \cdot V_{i,1} - 2 \cdot L2 \cdot V_{i,2} = T_{i,1}^* \quad (2')$$

avec $1 \leq i \leq M$.

Table 1.

(b) $j = N$.

$$-L2 \cdot V_{i,N-1} + (L2+1) \cdot V_{i,N} = T_{i,N}^* - L2 \cdot \frac{\Delta z}{\lambda} \cdot \phi \quad (3')$$

avec $1 \leq i \leq M$.

Les relations (1), (2) et (3) forment un système linéaire de N équations à N inconnues pour chaque j (tel que $1 \leq j \leq N$), et fournissent la répartition des températures $U_{i,j,t+\Delta t}$ due au seul gradient en r . De même, les relations (1'), (2') et (3') fournissent les $V_{i,j,t+\Delta t}$ dûs au seul gradient en j .

Une méthode récursive, fondée sur la méthode d'élimination de Gauss [6], permet de résoudre aisément ces systèmes tridiagonaux.

La répartition bidimensionnelle de la température au temps $(t + \Delta t)$ s'obtient alors en ajoutant algébriquement à la répartition au temps $(T_{i,j}^* = T_{i,j,t})$, les variations $(T_{i,j}^* - U_{i,j,t+\Delta t})$ et $(T_{i,j}^* - V_{i,j,t+\Delta t})$.

Soit $T_{i,j,t+\Delta t} = U_{i,j,t+\Delta t} + V_{i,j,t+\Delta t} - T_{i,j,t}$ pour $1 \leq i \leq M$ et $1 \leq j \leq N$.

On vérifie ensuite la position de chacun des points de la surface extérieure par rapport à la condition limite donnée par la courbe de vaporisation.

Ceci permet de choisir des pas de temps avec le maximum d'efficacité, notamment pour décrire correctement la transition caléfaction ébullition nucléée.

Le calcul peut alors se poursuivre en incrémentant le temps et en réutilisant les relations (1), (2), (3) et (1'), (2'), (3') avec la nouvelle distribution bidimensionnelle de température.

L'enchaînement des calculs est donné par l'organigramme ci-dessus.

RESULTATS

La Fig. 4 schématise les résultats d'un calcul. A partir d'une courbe de vaporisation (Fig. 4a) que l'on rentre point par point dans le calcul, on détermine l'évolution des températures dans l'espace et dans le temps et, en particulier, l'évolution dans le temps de la température au centre de l'éprouvette. Cette évolution est comparée sur la Fig. 4(b), à la courbe de refroidissement enregistrée expérimentalement pendant la trempe.

On note que l'accord est correct pour la courbe de vaporisation choisie mais que cette courbe est quelque peu différente de celle que donne la littérature dans le cas du régime permanent [5, 8, 9].

On obtient aussi, à un instant donné, la topographie des températures au sein du métal (Fig. 5). Ce résultat que l'on ne peut obtenir par mesure directe, met en évidence l'anisothermie superficielle de l'éprouvette. De plus, la connaissance des températures à chaque instant, en chaque point de la pièce, est fondamentale pour

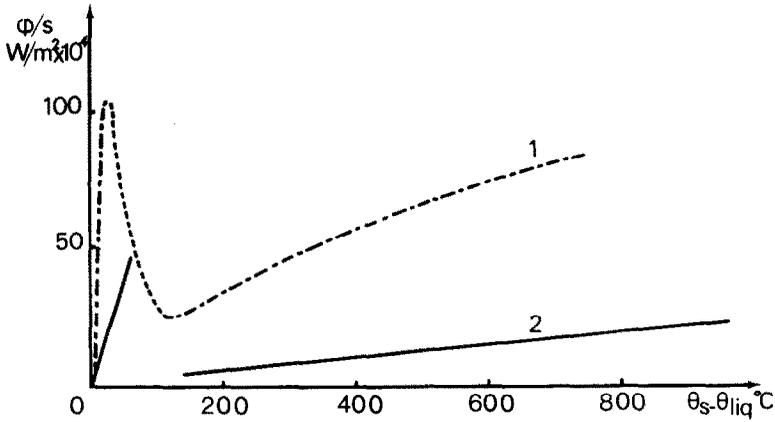


FIG. 4. (a) Courbes de vaporisation. 1. En régime permanent. 2. Utilisée dans le calcul.

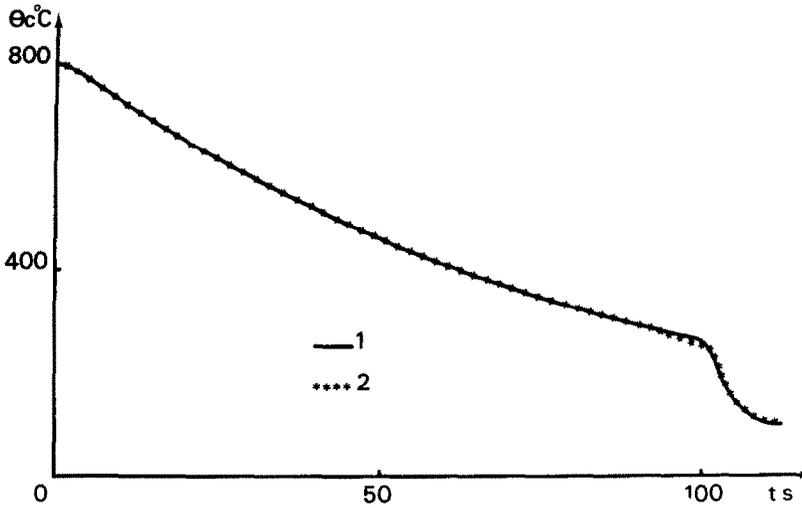


FIG. 4. (b) Courbes au centre de l'éprouvette. 1. Expérimentale. 2. Calculée à l'aide de la courbe de vaporisation (a.2).

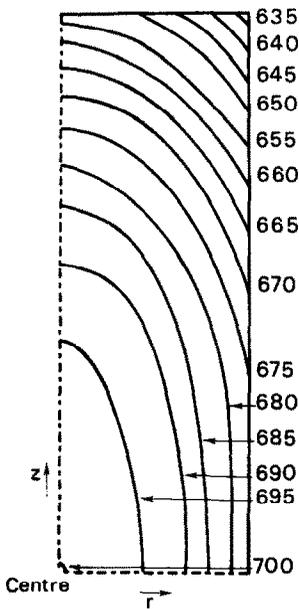


FIG. 5. Exemple de répartition de la température au sein du solide à un instant donné [$t = 13s$ sur la Fig. 4(b.1)].

aborder les études de la vaporisation du liquide car elle permet de connaître les températures de la surface d'échange que l'on ne sait pas mesurer correctement. La détermination de la distribution de température est indispensable pour étudier les contraintes thermiques provoquées dans le solide par le refroidissement car il faut calculer les dilatations différentielles au sein de l'éprouvette.

DISCUSSION

Cette méthode, relativement facile à mettre en oeuvre, est exploitable, compte tenu de la capacité mémoire nécessaire ($< 12 K$ mots de 16 bits) sur un minicalcateur.

Notons que le temps d'exécution est d'environ une seconde par itération sur le temps pour 60 points à l'intérieur du solide. Une des contraintes de la méthode est de nécessiter un pas de temps assez petit voisin de 0.02 s pour décrire la transition caléfaction-ébullition et l'ébullition nucléée. Ceci entraîne un temps de calcul global assez long et des erreurs de troncature qui peuvent ne pas être négligeables en fin de calcul.

En pratique, le programme est adapté au calcul par

simulation des courbes caractéristiques de vaporisation. Les refroidissements correspondants sont déterminés en enregistrant l'évolution de la température au centre de l'éprouvette (courbe de refroidissement). La démarche utilisée est fondée sur une méthode de tir. A partir d'une courbe de vaporisation estimée, on calcule la courbe de refroidissement que l'on compare à l'expérience et, pas à pas, on modifie la courbe de vaporisation pour que le calcul représente "correctement" l'expérience. Cette méthode est longue à mettre en oeuvre et souffre du fait que le critère "correctement" n'est pas explicitement mis en évidence. Une méthode numérique qui permettra d'obtenir directement la meilleure courbe de vaporisation en utilisant un critère du type énergie minimum devrait apporter une solution à ce problème.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Bigot, Contribution à l'étude thermocinétique de la trempe des métaux, Thèse Nancy (1964).
2. R. Bigot et R. Faivre, Application de l'oscillographe cathodique à l'enregistrement des courbes température-temps au cours de la trempe rapide des métaux, *Rev. Metall., Paris* **53**(2), 131 (1956).
3. J. C. Chevrier, F. Moreaux et G. Beck, La vaporisation pendant la trempe, *Rev. Gén. Thermique* **160**, 275-283 (1975).
4. S. Nukiyama, The maximum and minimum values of the heat Q transmitted from metal to boiling water under atmospheric pressure, *J. Japan. Soc. Engrs* **37**, 367-374 (1934).
5. G. Beck et J. C. Chevrier, Comparaison des données de trempe, déterminées à l'aide d'une méthode numérique, à celles du régime permanent, *Int. J. Heat Mass Transfer* **14**, 1731-1745 (1971).
6. B. Carnahan, H. Luther et J. Wilkes, *Applied Numerical Method*, John Wiley, New York (1969).
7. H. Carslaw et J. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, Oxford (1959).
8. A. Bergles et W. Thomson, The relationship of quench data to steady state pool boiling data, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 55-58 (1970).
9. C. Beurtheret, Vaporisation en régime complexe d'un liquide baignant une paroi chaude essentiellement anisotherme, *C.R. Hébd. Seanc. Acad. Sci., Paris* **259**, 519-522 (1964).

TEMPERATURE DISTRIBUTION INSIDE A CYLINDER IMMERSED IN A VAPORISABLE LIQUID

Abstract—A numerical method for solving unsteady heat-conduction equation during quenching is described. This method provides the bidimensional temperature distribution in a cylinder. It uses a finite difference technique based upon an implicit scheme. Boundary conditions representing heat transfer between a solid and a vaporisable liquid are used. Experimental temperature evolution can be compared with the results provided by this method in the case of quenching in boiling water. Liquid vaporisation characteristics can be obtained with this indirect way during the quench.

DIE TEMPERATURVERTEILUNG IN EINEM IN SIEDENDER FLÜSSIGKEIT ABGESCHRECKTEM ZYLINDER

Zusammenfassung—Es wird eine numerische Methode zur Lösung der instationären Wärmeleitgleichung während des Abschreckvorgangs beschrieben. Diese Methode liefert die zweidimensionale Temperaturverteilung in einem Zylinder. Die Methode geht von finiten Differenzen aus, welche auf einem impliziten Schema beruhen. Als Randbedingung wird der Wärmeübergang zwischen einem Festkörper und einer siedenden Flüssigkeit verwendet. Für den Fall des Abschreckens in siedendem Wasser können die nach dieser Methode berechneten Werte mit dem experimentell ermittelten Temperaturverlauf verglichen werden. Das Siedeverhalten kann auf diesem indirekten Weg während des Abschreckens erhalten werden.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ЦИЛИНДРА, ОХЛАЖДАЕМОГО ИСПАРЯЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Аннотация — Дано описание численного метода решения нестационарного уравнения теплопроводности применительно к процессу закалки. Этот метод позволяет получить двумерное распределение температуры в конечных разностях на основе неявной схемы. Граничные условия отражают процесс переноса тепла между твердым телом и испаряемой жидкостью. Экспериментальные значения температуры можно сравнить с результатами, полученными этим методом при закалке в кипящей воде. Этот косвенный путь можно использовать для получения характеристик процесса испарения жидкости во время закалки.